Universidad de Sonora

Revista de Física

Publicación de los Departamentos de Física y de Investigación en Física

Número 27, Septiembre de 2008

Hermosillo, Sonora, México

30º Aniversario

Geometría y Mecánica Cuántica

Gabino Torres Vega
Departamento de Física, Cinvestav, apartado postal 14-740, 07000 Distrito Federal, México

Es común utilizar a las matemáticas como una herramienta que nos ayuda a entender, describir y predecir a los sistemas biológicos, químicos, físicos, económicos, etc. Todas las mañanas queremos ver el reporte del clima para prepararnos por si llega a llover, o por si va a hacer frío o calor. Las predicciones del clima se logran gracias a que unas computadoras muy potentes utilizan los modelos matemáticos para el comportamiento de los fluidos.

En particular, la mecánica cuántica es la rama de la física que estudia a los objetos microscópicos. A estos objetos se les describe por medio de probabilidades (por ejemplo la probabilidad de encontrar a una partícula en algún lugar), y no por su posición y velocidad como se hace normalmente.

Iniciando con las ideas geométricas de Einstein sobre la fuerza gravitacional, existe una corriente conceptual en Física que precisamente utiliza ideas geométricas para entender y describir a los fenómenos físicos.

En mecánica cuántica hay al menos tres formas de introducir ideas geométricas y en este artículo hablaremos un poco de una de ellas. Nos basamos en las ideas de A. Kryukov del Departamento de Matemáticas de los Colegios de la Universidad de Wisconsin, presentadas recientemente [1].

Se puede asociar un vector a la información sobre una partícula microscópica. Un vector se puede visualizar como una flecha que apunta a algún lado. Conforme el tiempo pasa, la partícula cuántica se mueve y esto resulta en que el vector cambia de orientación y su punta describe una esfera. La longitud del vector siempre es uno, lo cual quiere decir que la partícula existe y se encuentra en algún lugar (véase la figura 1). Esta es una de las formas en que se introducen las ideas geométricas en la mecánica cuántica. Ahora se trata de estudiar la geometría de la esfera y de los conjuntos que se pueden tener en ella.

Figura 1: Una forma geométrica de representar a un sistema cuántico.

Cuando se mide alguna propiedad, la cual llamaremos $\hat{A}$, de un objeto microscópico, ésta puede tener varios valores que caen, principalmente, dentro de un rango conocido como el "ancho", que denotaremos como $\Delta\hat{A}$, y este ancho es diferente dependiendo de la cantidad que se mida. La medición hace que el vector cambie de orientación y su proyección en el plano tangente a la esfera es precisamente el ancho $\Delta\hat{A}$ (ver la figura 2).

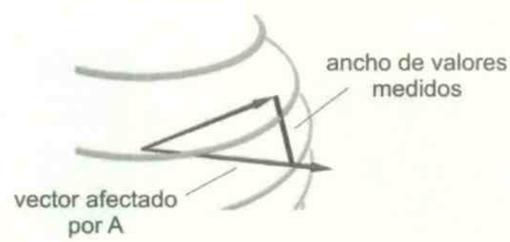

Figura 2: El rango de valores más probables de medir.

Una de las cosas que hace que la mecánica cuántica sea diferente de la mecánica clásica es que a veces no es lo mismo medir la cantidad $\hat{A}$ y después otra cantidad $\hat{B}$, que primero $\hat{B}$ y después $\hat{A}$. Esto causa que si medimos una de ellas con mucha precisión no vamos a poder medir la otra. A esto se conoce como el principio de incertidumbre de Heisenberg. Entonces en el mundo microscópico no podemos conocer simultáneamente la posición y la velocidad de un electrón, por ejemplo.

En nuestra representación geométrica, el principio de incertidumbre de Heisenberg corresponde a comparar dos áreas que están relacionadas con las mediciones $\hat{A}$ y $\hat{B}$ para las que no se pueden hacer mediciones simultáneas con mucha precisión. Los anchos de $\hat{A}$ y $\hat{B}$ forman un paralelogramo como el que se muestra en la figura 3(a) y tenemos que comparar el área de ese paralelogramo con el área del rectángulo formado por los mismos anchos, como se ve en la figura 3(b). Vemos que el área del rectángulo es mayor que la del paralelogramo. Esta es la forma geométrica del principio de incertidumbre de Heisenberg. Como el área del paralelogramo no va a ser cero, el producto de los anchos no es cero (el área del rectángulo) y entonces los anchos para $\hat{A}$ y para $\hat{B}$ no pueden ser muy pequeños simultáneamente; si uno es muy chico, el otro debe ser muy grande, para que el área del rectángulo siga siendo mayor que la del paralelogramo (para el tipo de mediciones de que hablamos, el ángulo entre los lados que forman el paralelogramo no puede ser cero).

Figura 3: El área de un rectángulo es mayor que la del paralelogramo con los mismos lados.

Así que hemos visto que una propiedad puramente geométrica (un área mayor que otra) puede relacionarse con un hecho puramente físico (el principio de incertidumbre de Heisenberg), en la forma que funciona la naturaleza. Un paradigma que vale la pena explorar.

[1] A. Kryukov, "Geometric derivation of quantum uncertainty", Phys. Lett. A **370**, 419 (2007).