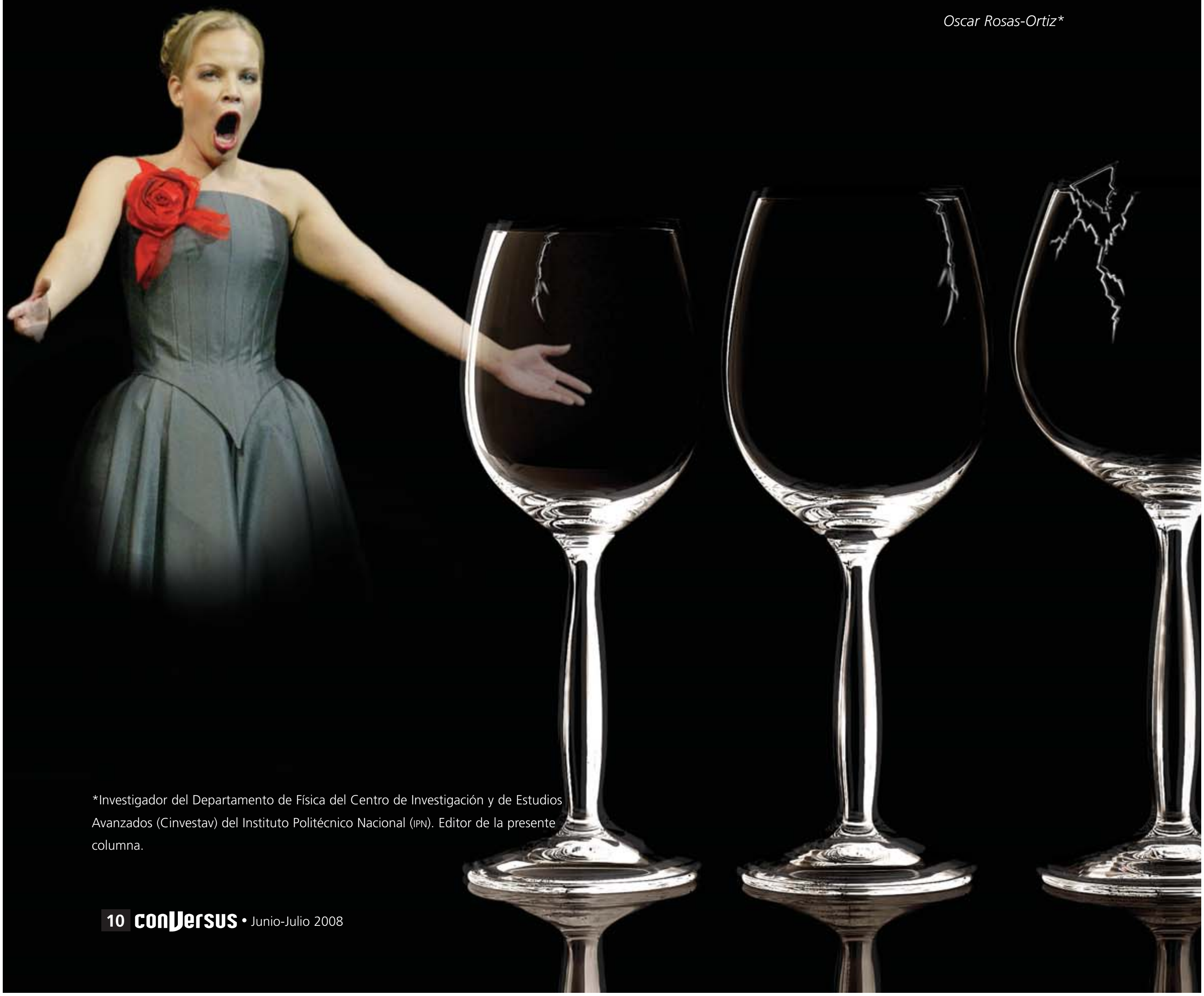
Oscar Rosas-Ortiz*

Resonancias en Mecánica Cuántica

Oscar Rosas-Ortiz*



*Investigador del Departamento de Física del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). Editor de la presente columna.

El fenómeno de *resonancia* se estudia con mucha profundidad en Física, Química e Ingeniería. Está asociado con sistemas tan dispares como un puente vehicular, un columpio, una guitarra, una copa de vidrio, la luz, una molécula o un átomo (entre otros). La característica común de todos ellos es que vibran u oscilan de alguna forma. Si quisiéramos aumentar la *intensidad* de oscilación de alguno de estos sistemas tendríamos que administrarle energía adicional. Una forma eficiente de hacerlo es aprovechar su *ritmo* natural de oscilación para inyectarle un poco de energía en cada vaivén. Con esto entramos en "complicidad" con el sistema (nos ponemos en *resonancia* con su estado de movimiento) para hacer más eficiente la administración de la energía.

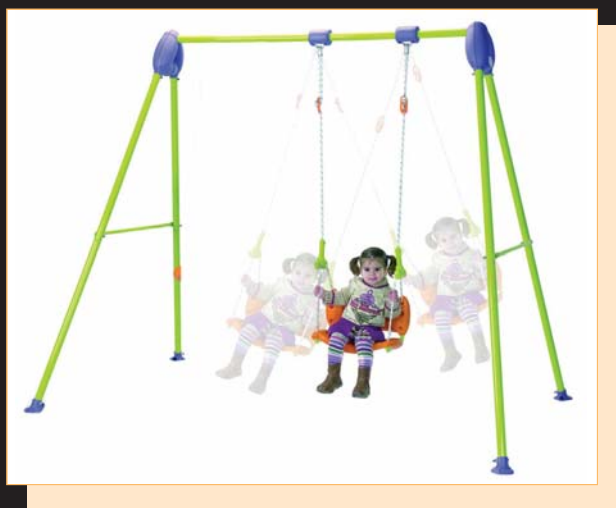
Modelos clásicos

Todos adquirimos una noción experimental de la resonancia cuando mecemos a alguien en un columpio. Un ligero "empujoncito" al columpio que se aleja de nosotros será suficiente para que éste vaya más lejos y alcance mayor altura. Repitiendo la acción en cada vaivén (esto es, con la frecuencia de oscilación del columpio) el efecto se multiplica. Desde luego, para evitar accidentes debemos salir de la resonancia con el columpio suspendiendo los "empujoncitos"; la fuerza de fricción del viento y la de los soportes del columpio terminarán por frenarlo.

En forma equivalente, los ingenieros que diseñan y construyen puentes deben incluir en sus cálculos los efectos de la resonancia. Un puente de grandes dimensiones que es mecido (en forma resonante) por el viento puede llegar a acumular una enorme cantidad de energía al grado que las oscilaciones sean tan grandes que terminen por echarlo abajo. El colapso del primer puente elevado de Tacoma Narrows (Estados Unidos, noviembre de 1940) se hizo célebre como un ejemplo del poder devastador del viento cuando entra en resonancia con estructuras tan grandes. Antes de venirse abajo, las oscilaciones transversales del puente alcanzaron una altura de 8.5 metros con respecto a la posición de equilibrio. También es gracias al efecto de resonancia que una copa de cristal se rompe por acción de la voz de algunos cantantes de ópera. Las notas que alcanzan tienen una frecuencia que entra en resonancia con la frecuencia de oscilación natural de las moléculas de cristal, haciéndolas oscilar más y más hasta que los enlaces que las mantienen unidas entre sí se rompen (el vidrio tiene una estructura más irregular que la del cristal y los enlaces de sus moléculas son también más débiles, por eso es más difícil romper el vidrio de una ventana que una copa de vino usando solo la voz). Del mismo modo, la vibración de las cuerdas de una guitarra entra en resonancia con el cuerpo de la guitarra para "amplificar" el sonido; la guitarra es entonces una "caja de resonancia" para las vibraciones del aire generadas por el tañido de las cuerdas.

En mecánica clásica un modelo simple de sistema oscilante (*oscilador*) es aquél que se mueve en línea recta, en un vaivén armónico (siempre con la misma frecuencia v y la misma amplitud de oscilación *A*) y sin que exista fuerza externa alguna aplicada sobre él. A los puntos donde el oscilador cambia de dirección se les llama *puntos de retorno*, la distancia entre ellos es la amplitud de oscilación y cada uno de ellos dista $A/2$ del *punto de equilibrio*. La frecuencia es igual al número de oscilaciones en un determinado intervalo de tiempo y se mide, por ejemplo, en ciclos por segundo. La energía total del sistema es proporcional al cuadrado de la amplitud: a mayor oscilación mayor es la energía. Un oscilador tridimensional ideal siempre puede descomponerse como la combinación de tres osciladores simples unidimensionales, cada uno de ellos moviéndose en una de las direcciones x, y ó z. En una primera aproximación todos los sistemas mencionados en los párrafos anteriores pueden representarse por un oscilador ideal. Sin embargo, este modelo no es apropiado para estudiar resonancias ya que al administrarle energía a uno de estos osciladores se aumentará su energía indefinidamente, alcanzando incluso valores infinitos, situación que no se observa en la naturaleza.

Un modelo más realista (*oscilador amortiguado*) incluye una fuerza periódica externa y una fuerza de fricción que es proporcional a la rapidez del oscilador. En este caso la amplitud de oscilación *A* es un número complejo que depende de la frecuencia natural del oscilador v, de la frecuencia w de la fuerza aplicada y del factor de proporcionalidad a de la fuerza de fricción (más precisamente, de ia, donde i es el número imaginario que representa a la raíz cuadrada de menos uno). Al graficar el módulo al cuadrado[1] de A como una función de w obtenemos una curva en forma de campana centrada en v, con ancho k (esta curva es la distribución de frecuencias del oscilador). En otras palabras, la energía del oscilador alcanza un máximo cuando la frecuencia w de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural v. Si el máximo de la campana se normaliza a 1 entonces la curva recibe el nombre de función de Fock-Breit-Wigner (FBW). Lo que debemos resaltar aquí es que la presencia de números complejos no sólo facilita los cálculos sino que hace la interpretación de los resultados más clara. A diferencia del oscilador ideal, donde A es un número real tal que la energía alcanza valores infinitos, un oscilador amortiguado con interacción resonante mantiene siempre finita su energía. Con este mismo modelo se estudia la dependencia de la carga eléctrica con la frecuencia en un circuito compuesto por un capacitor, un inductor y un resistor; la gráfica correspondiente muestra picos que se asocian con funciones FBW. Estos picos también aparecen en la gráfica de la transmisión de radiación infrarroja (como función de la posición) a través de películas delgadas, en la gráfica que indica la respuesta de ciertos materiales cuando se les somete a la acción de campos magnéticos, etcétera.



Modelos cuánticos

Para sistemas cuánticos existe también una descripción de estados resonantes. Al estudiar el tránsito de una partícula (*proyectil*) por una región donde la presencia de otra partícula (*objetivo*) se manifiesta por un campo de interacción de corto alcance (pero fuertemente atractivo) uno encuentra que, dependiendo de su energía, el proyectil puede quedar "atrapado" en la región de interacción. La "captura" del *proyectil* por el *objetivo* es una manifestación de la resonancia entre las energías de ambos e integran, de esta forma, un nuevo sistema que bien podría representar un átomo. La duración de captura es conocida como *tiempo de vida*; cuando el tiempo de vida es desmesuradamente grande (comparado, por ejemplo, con el tiempo de vida humano) decimos que el nuevo sistema es estable, de otra forma hablamos de sistemas inestables. En los casos más simples de interacción un sistema inestable decae, tarde o temprano, en las dos partículas que le dieron origen.

De acuerdo con la teoría cuántica, toda la información física de las partículas está codificada en la función de onda que es, a bajas energías, solución de la ecuación de Schrödinger. Para decodificar la información que nos interesa se calcula el módulo al cuadrado de la función de onda y se le identifica con la probabilidad de obtener un determinado resultado experimental. En otras palabras, las predicciones de la teoría cuántica con respecto a la medición de alguna cantidad física son de índole probabilístico. Por ejemplo, para estudiar un determinado sistema inestable nos podríamos preguntar sobre la probabilidad de encontrar una de sus partículas componentes fuera de la región de interacción. El modulo al cuadrado de la función de onda correspondiente dependerá, en este caso, tanto del tiempo como del espacio. Es decir, la respuesta a la pregunta depende tanto del momento en que hagamos la medición como del punto en el espacio que nos interesa investigar. Lo que "oscila" en este caso es la función de onda y con ella la probabilidad asociada con la predicción teórica: A un tiempo t la probabilidad de encontrar a la partícula aquí será más grande que la probabilidad de encontrarla allá pero, un instante después, es más probable encontrarla allí que encontrarla aquí. Lo más sorprendente es que la probabilidad Pf de encontrarla en cualquier punto fuera de la región de interacción aumenta con el tiempo mientras que la probabilidad Pd de encontrarla dentro disminuye. Si el tiempo de vida del sistema es T, para $t < T$ tendríamos $Pf < Pd$ mientras que en $t > T$ se verificaría que $Pf > Pd$.

Con todo, esta última descripción es un tanto inusual en el contexto de la teoría cuántica porque se requieren funciones de onda que toman valores muy grandes a distancias muy alejadas de la región de interacción. Es decir, quedan fuera de la interpretación convencional que exige que las funciones de onda sean de área finita si es que su módulo al cuadrado va a representar la probabilidad de hallar a la partícula alrededor de un determinado punto (la suma total de probabilidades debe ser igual a uno). Además de esto, para tener una descripción completa del decaimiento se requiere que la energía involucrada E sea un número complejo: $E = M - iN/2$. La parte *real* (M) de esta energía compleja correspondería a la energía de resonancia entre el proyectil y el objetivo, mientras que la parte *imaginaria* ($N/2$) estaría asociada con el inverso del tiempo de vida correspondiente.

Por otro lado, una vez lanzado el proyectil a la región de interacción existe una probabilidad de que salga rebotado y una de que atraviese más allá de dicha región. En correspondencia hay tres funciones de onda asociadas con este sistema (recordar que el módulo al cuadrado de la función de onda está asociado con la probabilidad): una función de onda incidente, una reflejada y una transmitida. El cociente de los módulos al cuadrado de las funciones de onda transmitida e incidente recibe el nombre de *coeficiente de transmisión*. Este coeficiente, al ser graficado como una función de la energía, presenta una serie de máximos y mínimos que, bajo condiciones específicas, pueden hacerse corresponder con funciones FBW. El centro M y el ancho N de cada uno de estos picos en forma de campana identifican respectivamente a la parte real y a la parte imaginaria de una energía compleja ($E = M - iN/2$). De esta manera las probabilidades involucradas hacen evidente el fenómeno de resonancia: Las partículas con energía igual a M pasan la región de interacción sin notar que existe el objetivo mientras que las partículas con energías cercanas a M son capturadas un cierto intervalo de tiempo cuya duración depende del ancho N del pico correspondiente en el coeficiente de transmisión.

El uso de energías complejas, como podemos ver, es necesario para describir una clase de sistemas que resultan del todo interesantes en muchas áreas de las ciencias exactas. En particular, los aspectos de los sistemas cuánticos que se estudian en Física Nuclear y en Química, entre otras disciplinas, corresponden a resonancias de los estados de energía correspondientes. Toda la descripción que se hace de los *sistemas estacionarios* (sistemas con energía definida) en los cursos convencionales de Mecánica Cuántica puede entenderse como el estudio de resonancias de la energía con ancho cero (es decir, con tiempo de vida infinito). Sin embargo, las energías complejas resultan bastante chocantes porque no se corresponden con la noción de *observable*[2] introducida por Heisenberg y Dirac en la teoría cuántica convencional. Además, desde el punto de vista de la

Puente elevado de Tacoma Narrows (Estados Unidos)

Física-Matemática, el estudio de resonancias representa un reto ya que no es sencillo obtener soluciones a la ecuación de Schrödinger que estén asociadas con valores complejos de la energía y que tomen valores muy grandes en los extremos del dominio de definición del potencial.

Nuevas aplicaciones de las resonancias

Para evitar conflictos con el concepto de observable en el estudio de resonancias cuánticas muchos autores han buscado alternativas a la estructura matemática del espacio vectorial donde "viven" las funciones de onda correspondientes (esta formulación es la estructura fundamental de los *espacios de Hilbert equipados*). Otros tantos investigan las simetrías de paridad (P, significa que el sistema es invariante ante un cambio de signo en la posición) y de inversión temporal (T, significa que la dinámica del sistema queda invariante ante un cambio en el signo del parámetro tiempo) en sistemas muy simples que son conocidos como *PT-simétricos* para construir modelos de observables complejos.

En el Departamento de Física del Cinvestav, junto con mis estudiantes, hemos tomado otra perspectiva; esta consiste en mantener la estructura del espacio de Hilbert intacta y pensar en alternativas para el concepto de observable que se apliquen a modelos más generales que los PT-simétricos. Para eso investigamos primero los estados resonantes de un determinado sistema y luego los usamos para construir nuevos potenciales solubles dentro de la teoría cuántica. Nuestros avances indican que es posible obtener sistemas cuánticos caracterizados por potenciales complejos que tienen el mismo espectro de energías que los potenciales reales convencionales. Aunque esta clase de interacciones no puede describirse en términos de los observables 'a la Heisenberg-Dirac', sí es posible hacer predicciones teóricas asociadas a los espectros de energía. En completa analogía con la descripción en óptica para la interacción de la luz con las superficies semiconductoras o metálicas, donde el índice de refracción es un número complejo, nuestros nuevos potenciales representan situaciones donde la región de interacción funciona como un sistema óptico que absorbe y emite ondas al mismo tiempo. Estos mismos potenciales podrían ser de utilidad en la investigación de puntos cuánticos. En la actualidad preparamos simulaciones por computadora donde se haga evidente el comportamiento de los paquetes de onda correspondientes durante su tránsito por la región descrita por estos potenciales complejos. En un artículo posterior daremos más detalles de los fenómenos físicos involucrados.

Notas

[1] Al número complejo z se le representa con la combinación de dos números reales x, y, de la siguiente manera: $z = x + iy$. El complejo conjugado de z se obtiene cambiando el signo del número imaginario i y suele denotarse con un asterisco, escribimos $z^* = x - iy$. El módulo al cuadrado de z se calcula entonces como el producto de z por su complejo conjugado, el resultado es igual a la suma de los cuadrados de x e y.

[2] Un *observable* en Mecánica Cuántica es un objeto matemático que representa alguna variable dinámica del sistema que puede medirse en el laboratorio. Está asociado con números reales (eigenvalores) que corresponden a los posibles resultados experimentales y con funciones de onda que corresponden a curvas de área finita (eigenfunciones). Heisenberg tomó este concepto como punto de partida para construir la mecánica matricial (la primera formulación correcta de la teoría cuántica) y Dirac lo reformuló en términos de operadores actuando en los espacios vectoriales que después serán conocidos como espacios de Hilbert.

Bibliografía

•Los aspectos generales de las resonancias desde el punto de vista de la mecánica clásica pueden consultarse en:
R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol 1, Ch. 23, Addison-Wesley (Reading, Massachusetts, 1963).
•En la siguiente pagina web puede apreciarse un video del colapso del Puente de Tacoma Narrows:
http://www.youtube.com/watch?v=HxTZ446tbzE
•Para el estudio de sistemas ópticos con índice de refracción complejo consultar:
G.R. Fowles, Introduction to Modern Optics, Dover Publications Inc. (New York, 1975)
•Algunos de los resultados de nuestro grupo de investigación en el contexto de las resonancias de sistemas cuánticos pueden encontrarse en los siguientes artículos (ver también las referencias allí citadas):
O. Rosas-Ortiz, R. Muñoz, "Non-Hermitian SUSY hydrogen-like Hamiltonians with real spectra", J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003) 8497
N. Fernández-García, O. Rosas-Ortiz, "Gamow-Siegert functions and Darboux-deformed short range potentials", Ann. Phys. 323 (2008) 1397
I. Cabrera-Munguia, O. Rosas-Ortiz, "Beyond conventional facorization: Non-Hermitian Hamiltonians with radial oscillator spectrum", J. Phys. Conf. Ser. (2008) en prensa.